Esercitazioni di Analisi Matematica 1
Ingegneria Edile-Architettura – Prof. A. Bonfiglioli

Foglio 1 - Principio di Induzione

► **Esercizio** 1. Utilizzando il Principio di Induzione si dimostrino le seguenti proposizioni (anche quando non specificato, la lettera n fa sempre riferimento ad un numero naturale):

1. Si provi che
$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\qquad \forall\, n\geq 2.$$

2. Si provi che
$$n!\geq 2^{n-1}\qquad \forall\, n\geq 1.$$
[Si ricordi che $n!$ è per definizione il prodotto $1\cdot 2\cdot 3\cdots n$.]

3. Si provi che
$$n^2>2n+1\qquad \forall\, n\geq 3.$$
[Si noti che per $n=1$ e $n=2$ questa è falsa!!]

4. Somma dei primi n quadrati:
$$1+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\qquad \forall\, n\geq 1.$$

5. Somma dei primi n cubi:
$$1+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2,\qquad \forall\, n\geq 1. \tag{1}$$
Attenzione! Questo esercizio non è per nulla semplice! Ci si renderà conto che occorre anche dimostrare che
$$2(1+2+\cdots+n)+(n+1)=(n+1)^2\quad \forall\, n\geq 1,$$
che può essere dimostrato per induzione preventivamente, e che è equivalente a quello che abbiamo provato a lezione: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$.
Per chi non riesce a dimostrare la formula (1) di cui sopra, si provi (con una sola applicazione del Principio di Induzione) la formula
$$1+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,\qquad \forall\, n\geq 1.$$

6. Somma dei primi n numeri dispari:
$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2,\qquad \forall\, n\geq 1.$$

7. Si provi che
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{n}{2n+1}\qquad \forall\, n\geq 1.$$

8. Si provi che
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \qquad \forall\, n \geq 1.$$

► **Esercizio** 2. 1. Assegnato un qualunque $q \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ si ha
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

[Questa formula ci permetterà di studiare $\sum_n q^n$: la *serie geometrica di ragione* q ...]

2. Si ha
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n} = 1 \qquad \forall\, n \geq 1.$$

[Da questa formula capiremo il perché della scrittura $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$

(*bisezioni successive dell'unità*)...]

3. Si ha
$$\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \cdots + \frac{3}{4^n}\right) + \frac{1}{4^n} = 1 \qquad \forall\, n \geq 1.$$

4. Assegnato un qualunque numero $\alpha \neq 0$ si ha
$$\left(\frac{\alpha-1}{\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha^2} + \cdots + \frac{\alpha-1}{\alpha^n}\right) + \frac{1}{\alpha^n} = 1 \qquad \forall\, n \geq 1.$$

5. Osservare che i casi (1), (2), (3) di cui sopra sono casi particolari del caso (4)...

6. Per ogni $q \neq 0$ si ha
$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} = 1 \qquad \forall\, n \geq 0.$$

[Ancora una formulazione alternativa di (1), somma parziale della serie geometrica...]

► **Esercizio** 3. Si provi per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ il numero $n^3 + 5\,n$ è divisibile per 6.
Si provi per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ il numero $n^3 + 3\,n^2 + 5\,n$ è divisibile per 3.

► **Esercizio** 4 (**Un esercizio mediamente difficile – facoltativo**). Si provi per induzione che i seguenti numeri non sono razionali:
$$\sqrt{1+\sqrt{1}}$$
$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$$
$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}$$
$$\vdots$$
$$\underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}_{\text{con } n \text{ volte } 1} \qquad (n \geq 2).$$

▶ **Esercizio** 5 (**Un esercizio difficile – facoltativo**). Si provi per induzione che ogni insieme A avente n elementi ha 2^n sottoinsiemi.

▶ **Esercizio** 6 (**Un esercizio senza il Principio di Induzione – facoltativo**). Provare che

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2}\\
&\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{2}\\
&\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}>\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Col trucco di minorare tutti gli addendi (tranne l'ultimo) con l'ultimo addendo $\frac{1}{2^{n+1}}$, provare che in generale si ha la seguente formula (che generalizza le precedenti, prendendo $n = 2, 3, 4$):

$$\underbrace{\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}}_{\text{per un totale di } 2^n \text{ addendi}}>\frac{1}{2} \qquad \forall\, n \geq 1.$$

[Questa formula ci permetterà di dimostrare che la *serie armonica semplice* $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge...]

Nonostante la tentazione (...è pur sempre una famiglia di frasi aperte $\mathcal{P}(n)$...), non è affatto facile dimostrare questa disuguaglianza per induzione! Non è infatti per nulla chiaro come rapportare la frase $\mathcal{P}(n+1)$ alla frase $\mathcal{P}(n)$.

▶ **Esercizio** 7 (**Un esercizio che sembra "negare" il Principio di Induzione**). Si consideri la frase aperta

$$\mathcal{P}(n): \qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=\sqrt{2}-\frac{n+2}{2^n}.$$

Si provi che, assumendo vera $\mathcal{P}(n)$, segue la veridicità di $\mathcal{P}(n+1)$. Ma nessuna delle identità $\mathcal{P}(n)$ può essere vera, altrimenti $\sqrt{2}$ sarebbe uguale a $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}+\frac{n+2}{2^n}$, che è un numero razionale!!

È questo in contraddizione con il Principio di Induzione? Perchè?